# PGCD de deux entiers naturels

## I. Définition

**Remarque :** Le nombre 1 est un diviseur de tous les entiers.
Donc deux nombres entiers positifs admettent au moins un diviseur commun : le nombre 1.

**Définition :** a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.
Le plus grand des diviseurs communs à *a* et *b* s'appelle le **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur) des nombres a et b et se note PGCD(a ; b).

***Exemples :***

*Les diviseurs de 12 sont :1; 2; 3; 4; 6; 12.*
*Les diviseurs de 15 sont : 1; 3; 5; 15.*
*Les diviseurs communs à 12 et 15 sont 1 et 3.*
*Donc PGCD(12;15) = 3.*

*Les diviseurs de 10 sont :1; 2; 5; 10.*
*Les diviseurs de 9 sont : 1; 3; 9.*
*10 et 9 ont un seul diviseur commun : 1.*
*Donc PGCD(10;9) = 1.*

**Propriétés :** a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.
- ✓ PGCD(a ; a) = a ;
- ✓ PGCD(b ; a) = PGCD(a ; b) ;
- ✓ Si b est un diviseur de a, alors PGCD(a ; b) = b.

***Exemple :*** *15 est un diviseur de 60, donc PGCD(60 ; 15) = 15.*

## II. Détermination du PGCD de deux entiers

### 1. En utilisant la définition : *voir les exemples ci-dessus.*

### 2. En utilisant l'algorithme des soustractions successives

**Propriété :** a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec a>b.
PGCD(a ; b) = PGCD(b; a – b).

***Exemple :*** *Calculer le PGCD de 117 et 91.*

*117 – 91 = **26** d'où PGCD(117 ; 91) = PGCD(91 ; **26**);*

*91 – 26 = **65** d'où PGCD(91 ; 26) = PGCD(26 ; **65**) = PGCD(**65** ; 26);*

*65 – 26 = **39** d'où PGCD(65 ; 26) = PGCD(26 ; **39**) = PGCD(**39** ; 26);*

*39 – 26 = **13** d'où PGCD(39 ; 26) = PGCD(26 ; **13**);*

*26 – 13 = **13** d'où PGCD(26 ; 13) = PGCD(13 ; **13**);*

*Or PGCD(13 ; 13) = 13. Donc PGCD(117 ; 91) = 13.*

### 3. En utilisant l'algorithme d'Euclide

**Propriété :** a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec a>b.
PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) où r est le **RESTE** de la division euclidienne de a par b.

***Exemple :*** *Calculer le PGCD de 117 et 91.*

*117 = 91 × 1 + 26 d'où PGCD(117 ; 91) = PGCD(91 ; **26**);*

*91 = **26** × 3 + **13** d'où PGCD(91 ; 26) = PGCD(26 ; **13**);*

*26 = **13** × 2 + 0. d'où 13 est un diviseur de 26.*

*D'où PGCD(26 ; 13) = 13. Donc PGCD(117 ; 91) = 13.*

*Lien vers le site de Thérèse Eveilleau :*
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/euclide.htm

**Remarque :**
Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le **dernier reste non nul**.

## III. Utilisation du PGCD de deux entiers

### 1. Nombres premiers entre eux

**Définition :** on dit que deux nombres entiers non nuls sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

***Exemples :***

*PGCD(117 ; 91) = 13. Donc 117 et 91 ne sont pas premiers entre eux.*

*PGCD(10 ; 9) = 1. Donc 10 et 9 sont premiers entre eux.*

### 2. fractions irréductibles

**Définition :**
on dit qu'une fraction est **irréductible** lorsqu'elle ne peut plus être simplifiée.

**Propriété :** Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors cette fraction est irréductible.

***Exemples :***

*117 et 91 ne sont pas premiers entre eux. Donc la fraction n'est pas irréductible.*

*10 et 9 sont premiers entre eux. Donc la fraction est irréductible.*

**Propriété :** Si on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, alors on obtient une fraction irréductible.

***Exemple* :** *Simplifier la fraction* $\frac{221}{323}$.

*a) Calcul du PGCD du numérateur et du dénominateur par l'algorithme d'Euclide.*

*323 = 221 × 1 + 102 d'où PGCD(323 ; 221) = PGCD(221; 102)*

*221 = 102 × 2 + 17 d'où PGCD(221 ; 102) = PGCD(102 ; 17)*

*102 = 17× 6 + 0 d'où PGCD(102 ; 17) = 17.*

*Donc PGCD(323 ; 221) =* ***17****.*

*b) Simplification de la fraction :* $\frac{221}{323} = \frac{17 \times 13}{17 \times 19} = \frac{13}{19}$.

## 3. Problèmes

**Exemple :** Une association organise une compétition sportive.

144 filles et 252 garçons se sont inscrits.

L'association désire répartir les inscrits en équipes mixtes. Le nombre de filles doit être le même dans chaque équipe, ainsi que le nombre de garçons. Tous les inscrits doivent être dans une des équipes.

Quel est le nombre maximal d'équipes que cette association peut former ?

Quelle est alors la composition de chaque équipe ?

***Solution* :**

*Pour que tous les inscrits soient dans une équipe, il faut que le nombre d'équipes divise le nombre de filles et le nombre de garçons :*
*le nombre d'équipes est donc un diviseur commun à 144 et 252.*

*De plus, on cherche le nombre maximal d'équipes qu'on peut constituer :*
*le nombre d'équipes est donc le PGCD de 144 et 252.*

*Calcul du PGCD de 144 et 252 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :*
*252 = 144 1 + 108 d'où PGCD(252 ; 144) = PGCD(144 ; 108)*
*144 = 108 1 + 36 d'où PGCD(144 ; 108) = PGCD(108 ; 36)*
*108 = 36 3 + 0 d'où PGCD(108 ; 36) = 36.*
*Donc PGCD(144 ; 252) =* ***36****.*

*Cette association peut donc constituer un maximum de 36 équipes.*

*<u>Composition de chaque équipe :</u>*
$\frac{144}{36} = 4$ : *il y a donc 4 filles dans chaque équipe.*
$\frac{252}{36} = 7$ : *il y a donc 7 garçons dans chaque équipe.*